Aufgaben zur Vorlesung I – Rechenarten und Rechengesetze (17.09.2018)

Holger Wuschke

1 Primfaktorzerlegung

Aufgabe 1 aus der VL: Bestimmen Sie $\text{kgV}(65, 225)$ und $\text{ggT}(87, 99)$.

2 Klammerausdrücke

Aufgaben 2 aus der VL:

1. $(5a - 7b) \cdot 4a - 5b \cdot (3a - 8b) - (7b - 2a) \cdot 6a + 3b \cdot (5a - b)$
2. $(3x - 4)^2 + (2x - 3)^2$
3. $(4x + y)^2 - (2x + 3y)^2$
4. $2ax + ay - 2bx - by$ (Faktorisieren Sie!)

3 Bruchrechnung

Aufgaben 3 aus der VL:

1. $8\frac{3}{4} : 7$
2. $\left(-\frac{p}{3} + \frac{q}{4} - \frac{r}{5}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2}\right)$
3. $\dfrac{22ax^2y^2}{27brx^2} : \dfrac{66x^2y}{18r^2s}$
4. $\dfrac{35a^2}{43b^2} : 14a$
5. $\dfrac{1}{m+n} + \dfrac{1}{m-n}$
6. $\dfrac{\frac{34}{3} - \frac{91}{12}}{\left(\frac{7}{16} - \frac{17}{48}\right) \cdot 15}$
7. $\dfrac{3x^2 - 3xy}{x+y} - \dfrac{6y^2 + 6xy}{x-y}$
8. $\dfrac{8a^2 + 8b^2 + 16ab}{\dfrac{a+b}{a-b}}$
9. $\dfrac{a+1}{a^2-a} - \dfrac{a-1}{a^2+a} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{a^2-1}$

3.1 Brüche umwandeln

Aufgaben 4 aus der VL:

1. Wandeln Sie $0,\overline{2}$ in einen gemeinen Bruch um.
2. Wandeln Sie $\dfrac{1}{7}$ in einen Dezimalbruch um.

3. Wandeln Sie $0,6\overline{1}$ in einen gemeinen Bruch um.

4. Wandeln Sie $0,2\overline{27}$ in einen gemeinen Bruch um.

5. Wandeln Sie $\frac{31}{99}$ in einen Dezimalbruch um.

6. Wandeln Sie $0,3\overline{536}$ in einen gemeinen Bruch um.

4 Potenzen

Aufgaben 5 aus der VL:

1. Leiten Sie (P1 b), (P2) und (P4) aus der Definition der Potenz her.

$$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

2. $a \cdot r^p + b \cdot s^p - c \cdot r^p + d \cdot s^p$

3. $x^{3m-1} \cdot x^{m+1}$

4. $\frac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 \cdot 6^2}$

5. $\frac{5 \cdot a^{x+y} \cdot b^{3u+v}}{7 \cdot c^2} : \frac{5 \cdot c^4}{28 \cdot a^{y-x} \cdot b^{v-2u}}$

6. (i) $(-u^2)^3$ (ii) $((-u)^2)^3$ (iii) $(-u^3)^2$ (iv) $-(u^3)^2$

5 Potenzen mit rationalem Exponenten

Aufgaben 6 aus der VL:

1. $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3$

2. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

3. $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

5. $\left(\sqrt{0,5}\right)^{-2}$

6. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}}$

7. $\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{x}}}}$

8. $\dfrac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x}}}}$

9. $\dfrac{\sqrt[6]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[9]{x^7}}}{\sqrt[9]{x^7} \cdot \sqrt{x}}$

5.1 Rationalmachen des Nenners

Aufgabe 7 aus der VL: Machen Sie den Nenner rational: $\dfrac{5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

6 Logarithmen

Aufgaben 8 aus der VL:

1. Formen Sie folgenden Ausdruck mit Hilfe der Logarithmengesetze um:
$$\ln \frac{2 \cdot \sqrt{a+b} \cdot a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{c} \cdot (a+c)^2}$$

2. Weisen Sie Lemma 1 mithilfe der Definition nach.
Aus der Definition folgt für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $r \in \mathbb{R}$:
$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b^r = r \;\text{ und }\; b^{\log_b r} = r$$

3. Beweisen Sie (L3b) mithilfe von (P4).
$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$$

4. Beweisen Sie (L2) mithilfe von (P3).
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

7 Summenzeichen

Aufgaben 9 aus der VL: Berechnen Sie.

1. $\sum\limits_{k=-5}^{5} 3(k+1) - \sum\limits_{k=-5}^{5} 3(k-1)$

2. $\sum\limits_{k=0}^{9} (k+1)^2 - \sum\limits_{k=0}^{9} (k-1)^2$
Wem das zu leicht fällt: Zum Weiterdenken

3. $\sum\limits_{k=2}^{10} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{9} (2k+3)$
(Eine Indexverschiebung wäre wünschenswert.)

4. $\sum\limits_{k=3}^{5} \sum\limits_{m=1}^{4} (4k - 2m)$

8 Polynomdivision

Aufgaben 10 aus der VL: Üben Sie die Polynomdivision!

1. $(x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3) : (x - y)$

2. $(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x - 1)$

3. $(x^3 - y^3) : (x - y)$

4. $(x^3 + y^3) : (x + y)$

9 Binomialkoeffizient und Binomischer Lehrsatz

Aufgaben 11 aus der VL:

1. Beweisen Sie die Eigenschaften 1 bis 4 des Binomialkoeffizienten.

   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

   (b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

   (c) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

   (d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

   (e) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

2. Bestimmen Sie $(t + z)^6$ mithilfe des Binomischen Lehrsatzes.

3. Bestimmen Sie $(2a - 3b)^4$ mithilfe des Binomischen Lehrsatzes.

4. Nehmen Sie an, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ gilt.

   Zeigen Sie nun, dass auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + a^n$

   das gewünschte Ergebnis $\dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ liefert.