Aufgaben zur Vorlesung VI – Trigonometrie (21.09.2018)

Holger Wuschke

1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Sei $\triangle ABC$ rechtwinklig mit Hypotenuse c. Zeigen Sie anhand der definierten Seitenverhältnisse, dass folgende Gleichungen gelten:

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
   (Analog könnten Sie auch den Kotangens herleiten.)

2. $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)

3. $1 + (\tan\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\cos\alpha)^2}$

4. $1 + (\cot\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\sin\alpha)^2}$

2 Sinus- und Kosinussatz

Zeigen Sie unter Verwendung der VL, dass in einem allgemeinen Dreieck folgende Flächeninhaltsformeln gelten:

$$A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$$

3 Trigonometrische Funktionen und Additionstheoreme

1. Erstellen Sie sich eine Tabelle mit charakteristischen Funktionswerten (z.B. $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{5\pi}{6}$) für die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$.

2. Zeigen Sie das dritte Additionstheorem

   $$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \text{ und } \cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

   unter Verwendung von Theorem 1 bzw. Theorem 2.

3. Zeigen Sie das vierte Additionstheorem für den Fall "+":

   $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

   unter Verwendung von Theorem 1 und Theorem 2.

   Hinweis: Zu zeigen ist, dass $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta}$ *gilt.*

4 Polarkoordinaten

1. Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der nachfolgenden Punkte in Polarkoordinaten.

   $P_1(3|\frac{5\pi}{6})$; $P_2(\frac{3}{2}|\frac{3\pi}{2})$; $P_3(4|\pi)$; $P_4(8|\frac{10\pi}{3})$

2. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkte.

   $K_1(0|2)$; $K_2(-4|0)$; $K_3(0|-5)$, $K_4(\frac{3}{\sqrt{2}}|\frac{\sqrt{18}}{2})$,