Aufgaben zur Vorlesung VII – Komplexe Zahlen (24.09.2018)

Holger Wuschke

1 Rechengesetze in den komplexen Zahlen

1. Berechnen Sie die nachfolgenden Aufgaben und stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene dar.
   - $2 - i + (-3 + 2i)$
   - $(-1 + 2i) \cdot i$
   - $\overline{4 - 2i} - (3 + i)$
   - $\frac{1}{2i} + \frac{\sqrt{2} - 5i}{2 + \sqrt{5}}$
2. Beweisen Sie: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
3. Beweisen Sie: $|z| = |\overline{z}|$
4. Beweisen Sie: $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
5. Beweisen Sie: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

2 Komplexe Zahlen in Polardarstellung

Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Polardarstellung um:

1. i
2. $\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$
3. $\sqrt{i}$
4. $\frac{5}{2} - \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12}} \cdot i$

Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $a + i \cdot b$ um.

1. $2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$
2. $2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$
3. $4 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$
4. $6 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}$

Zusatzaufgaben

Seien auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ folgende Operatoren definiert:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$ (komponentenweise)
2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2\ ,\ x_1y_2 + y_1x_2)$

Dann identifizieren wir den so definierten Körper $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ als komplexe Zahlen $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie anhand dieser Definition der komplexen Zahlen, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. $\forall g, h \in \mathbb{C} : g + h = h + g$ (Kommutativität der Addition)
2. $\forall g, h \in \mathbb{C} : g \cdot h = h \cdot g$ (Kommutativität der Multiplikation)
3. $0 := (0, 0) \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element der Addition, d.h. $\forall g \in \mathbb{C} : 0 + g = g$
4. $1 := (1, 0) \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. $\forall g \in \mathbb{C} : 1 \cdot g = g$
5. Für $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ gilt, dass $i^2 = -1$ ist.