I Rechengesetze und Rechenarten

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

17. September 2018

Primfaktoren

Primfaktorzerlegung

Jede natürliche (und auch ganze) Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann in ein Produkt von ausschließlich Primzahlen als Faktoren (**Primfaktoren**) zerlegt werden.

Dies ist nützlich zur Bestimmung von **kgV** (kleinstem gemeinsamen Vielfachen) und **ggT** (größter gemeinsamer Teiler).

Beispiele Primfaktorzerlegung

$$228 = 114 \cdot 2 = 57 \cdot 2 \cdot 2 = 19 \cdot 3 \cdot 2^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$$

$$60 = 15 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Aufgabe in der VL

Bestimmen Sie das $\text{kgV}(60, 140)$ und $\text{ggT}(60, 140)$

Beispiel 1 – Bestimmung kgV und ggT

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
60 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & & & & \\
140 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & 7 & & \\
\hline
\mathrm{kgV}(60, 140) & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & = & 420 \\
\mathrm{ggT}(60, 140) & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & & & = & 20
\end{array}$$

Beispiel 2 – Bestimmung kgV und ggT

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
18 & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & & & & & & \\
90 & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & & & & \\
114 & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & & & & & 19 & & \\
\hline
\mathrm{kgV}(18, 90, 114) & = & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 19 & = & 1710 \\
\mathrm{ggT}(18, 90, 114) & = & 2 & \cdot & 3 & & & & & & & = & 6
\end{array}$$

Aufgabe 1 aus der VL

Bestimmen Sie $\mathrm{kgV}(65, 225)$ und $\mathrm{ggT}(87, 99)$.

Klammerausdrücke I

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, dann gelten folgende Rechengesetze:

Kommutativgesetz (K)

$a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz (A)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetz (D)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \overset{(K)}{=} a \cdot c + b \cdot c$$

Klammerausdrücke II

binomische Formeln

$$\begin{array}{lrcc}
(B1) & (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\
(B2) & (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\
(B3) & (a+b)\cdot(a-b) & = & a^2-b^2
\end{array}$$

Aufgaben 2 aus der VL

1. $(5a-7b)\cdot 4a - 5b\cdot(3a-8b) - (7b-2a)\cdot 6a + 3b\cdot(5a-b)$
2. $(3x-4)^2+(2x-3)^2$
3. $(4x+y)^2-(2x+3y)^2$
4. $2ax+ay-2bx-by$ (Faktorisieren Sie!)

Bruchrechnung

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $b, d \neq 0$. Dann gelten folgende Rechengesetze:

Rechengesetze

$$(i) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$(ii) \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

$$(iii) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$(iv) \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \Rightarrow c \neq 0$$

$$\overset{(iii)}{=} \frac{ad}{bc}$$

Folgerung

Seien $c, d \in \mathbb{Z}$; $c, d \neq 0$

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$$

<u>Beweis</u>:

Setze in (iv) $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ $\square$

Aufgaben 3 aus der VL

1. $8\frac{3}{4} : 7$
2. $\left(-\frac{p}{3} + \frac{q}{4} - \frac{r}{5}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2}\right)$
3. $\dfrac{22ax^2y^2}{27brx^2} : \dfrac{66x^2y}{18r^2s}$
4. $\dfrac{35a^2}{43b^2} : 14a$
5. $\dfrac{1}{m+n} + \dfrac{1}{m-n}$
6. $\dfrac{\frac{34}{3} - \frac{91}{12}}{\left(\frac{7}{16} - \frac{17}{48}\right) \cdot 15}$
7. $\dfrac{3x^2 - 3xy}{x+y} - \dfrac{6y^2 + 6xy}{x-y}$
8. $\dfrac{8a^2 + 8b^2 + 16ab}{\frac{a+b}{a-b}}$
9. $\dfrac{a+1}{a^2-a} - \dfrac{a-1}{a^2+a} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{a^2-1}$

Periodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandeln

Beispiel – Umwandlung von $0,2\overline{37} = ?$

Idee: Periode eliminieren

Vorgehensweise: Sei $0,2\overline{37} = a \Rightarrow 23,7\overline{37} = 100a$

Nun ist es möglich die Periode durch Subtraktion zu eliminieren:

$$\begin{array}{rrcl} & 100a & = & 23,7\overline{37} \\ - & a & = & 0,2\overline{37} \\ \hline & 99a & = & 23,5 \\ \\ \Leftrightarrow & 198a & = & 47 \\ \\ \Leftrightarrow & a & = & \dfrac{47}{198} \end{array}$$

Aufgaben 4 aus der VL

1. Wandeln Sie $0,\overline{2}$ in einen gemeinen Bruch um.
2. Wandeln Sie $\dfrac{1}{7}$ in einen Dezimalbruch um.
3. Wandeln Sie $0,6\overline{1}$ in einen gemeinen Bruch um.
4. Wandeln Sie $0,2\overline{27}$ in einen gemeinen Bruch um.
5. Wandeln Sie $\dfrac{31}{99}$ in einen Dezimalbruch um.
6. Wandeln Sie $0,3\overline{536}$ in einen gemeinen Bruch um.

Potenzrechnung

Seien $x, y \in \mathbb{Q} (\in \mathbb{R})$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Sei o.B.d.A $a \geq b$

Definition Potenz

Wird ein Faktor x (**Basis**) wiederholt mit sich selbst multipliziert, heißt das Ergebnis **Potenz** von x.

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{a-mal}} := x^a$$

Dabei ist a der **Exponent**

Potenzgesetze

(P1 a)	$x^a \cdot y^a$	$=$	$(x \cdot y)^a$
(P1 b)	$\frac{x^a}{y^a}$	$=$	$\left(\frac{x}{y}\right)^a$
(P2)	$x^a \cdot x^b$	$=$	x^{a+b}
(P3)	$\frac{x^a}{x^b}$	$=$	x^{a-b}
(P4)	$(x^a)^b$	$=$	$x^{a \cdot b}$

Erläuterungen

$$(P1a) \quad x^a \cdot y^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{a-mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{a-mal}}$$

$$\underset{(K)}{\overset{(A)}{=}} \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{\text{a-mal}} = (x \cdot y)^a$$

$$(P3) \quad \frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{\text{a-mal}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{b-mal}}}$$

$$\underset{a \geqq b}{=} \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{\text{a-b-mal}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x}} = x^{a-b}$$

Definition x^{-k}

$$x^{-k} := \frac{1}{x^k}$$

Definition x^0

$$x^0 := 1$$

Definition x^1

$$x^1 := x$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^{-2} \overset{\text{z.B.}}{=} x^{1-3} \overset{(P3)}{=} \frac{x}{x^3} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^0 \overset{\text{z.B.}}{=} x^{2-2} \overset{(P3)}{=} \frac{x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^1 \overset{\text{z.B.}}{=} x^{2-1} \overset{(P3)}{=} \frac{x^2}{x} = \frac{x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = x$$

Aufgaben 5 aus der VL

1. Leiten Sie (P1 b), (P2) und (P4) aus der Definition der Potenz her.
2. $a \cdot r^p + b \cdot s^p - c \cdot r^p + d \cdot s^p$
3. $x^{3m-1} \cdot x^{m+1}$
4. $\dfrac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 \cdot 6^2}$
5. $\dfrac{5 \cdot a^{x+y} \cdot b^{3u+v}}{7 \cdot c^2} : \dfrac{5 \cdot c^4}{28 \cdot a^{y-x} \cdot b^{v-2u}}$
6. (i) $(-u^2)^3$ (ii) $((-u)^2)^3$ (iii) $(-u^3)^2$ (iv) $-(u^3)^2$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Überlegung

$$(5^3)^{\frac{1}{3}} \overset{(P4)}{=} 5^{3\cdot\frac{1}{3}} = 5$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{1}{3}} := \sqrt[3]{5}$$

Definiton n-te Wurzel

Seien $x \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Die **n-te Wurzel** von x ist eine Zahl $y > 0$ für die gilt: $y^n = x$

Notation: $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x} := y$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

Seien $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $p, q \in \mathbb{N}$

(P1 a') $\sqrt[p]{u} \cdot \sqrt[p]{v} = \sqrt[p]{u \cdot v}$

(P1 b') $\dfrac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \sqrt[p]{\dfrac{u}{v}}$

(P4') $\sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \sqrt[p\cdot q]{u}$

(P2') $\sqrt[p]{u} \cdot \sqrt[q]{u} = \sqrt[p\cdot q]{u^{q+p}}$

(P3') $\dfrac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[q]{u}} = \sqrt[p\cdot q]{u^{q-p}}$

Erläuterungen

(P1 a') $$\sqrt[p]{u}\cdot\sqrt[p]{v} = u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(P1 a)}}{=} (u\cdot v)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{u\cdot v}$$

(P1 b') $$\frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \overset{\text{(P1 b)}}{=} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\frac{u}{v}}$$

(P2') $$\sqrt[p]{u}\cdot\sqrt[q]{u} = u^{\frac{1}{p}}\cdot u^{\frac{1}{q}} \overset{\text{(P2)}}{=} u^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = u^{\frac{q+p}{p\cdot q}} = \sqrt[p\cdot q]{u^{q+p}}$$

(P3') $$\frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[q]{u}} = \frac{u^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{q}}} \overset{\text{(P3)}}{=} u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = u^{\frac{q-p}{p\cdot q}} = \sqrt[p\cdot q]{u^{q-p}}$$

(P4') $$\sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \left(u^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(P4)}}{=} u^{\frac{1}{p\cdot q}} = \sqrt[p\cdot q]{u}$$

Bemerkungen

1. Es gilt: $\sqrt[q]{u^p} = (u^p)^{\frac{1}{q}} \overset{(P4)}{=} u^{p \cdot \frac{1}{q}} = u^{\frac{p}{q}}$
2. Sei $u \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$.

   Dann ist $\sqrt[2p]{u^{2p}} = |u| := \begin{cases} -u, & u < 0, \\ u, & u \geqq 0. \end{cases}$
3. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ bzw. $\sqrt{-1}$ sind

   $\pm i \in \mathbb{C}$ (Imaginäre Einheit der Komplexen Zahlen).

   Es gilt: $i^2 = -1$

   Zahlen in $\mathbb{C}$ bestehen aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b und haben die Form $z = a + i \cdot b$.

   $\rightarrow$ Jede reelle Zahl hat Imaginärteil $b \equiv 0$.

Aufgaben 6 aus der VL

1. $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3$
2. $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$
3. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}$
4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$
5. $\left(\sqrt{0,5}\right)^{-2}$
6. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}}$
7. $\sqrt{\dfrac{x}{y} \cdot \sqrt{\dfrac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{y^3}{x}}}}$
8. $\dfrac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x}}}}$
9. $\dfrac{\sqrt[6]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[9]{x^7}}}{\sqrt[9]{x^7 \cdot \sqrt{x}}}$

Rationalmachen des Nenners

Schema

Es gilt für $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \cdot 1 = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufgabe in der VL

Wie würden Sie bei $\dfrac{1 + 2 \cdot \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ den Nenner rational machen?

Aufgabe

$$\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\overset{(B3)}{=} \frac{1+2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\cdot\overbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}^{=3}}{1^2-\underbrace{(\sqrt{3})^2}_{=3}} = \frac{-5+\sqrt{3}}{-2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

Aufgabe 7 aus der VL

Machen Sie den Nenner rational: $\dfrac{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Logarithmen

Überlegung

$2^x = 8$ die Lösung für x ist intuitiv: $x = 3$, aber allgemein?
$\rightarrow \log_2 8 = x$

Definition Logarithmus

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$; $a, b \neq 1$, dann ist der **Logarithmus**[a] a zur Basis b ein umgeschriebener Exponent (reelle Zahl c), definiert durch:

$$\log_b a = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b^c = a$$

[a] Logarithmus ($\lambda o \gamma \acute{o} \sigma$ = Verhältnis, $\alpha \rho \iota \theta \mu \acute{o} \varsigma$ = Zahl); Begriff ~1614 durch John Napier: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \log a - \log b = \log c - \log d$

Logarithmengesetze

Seien $a, b, d, x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b, d \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{llcl}
(L1) & \log_b (x \cdot y) & = & \log_b x + \log_b y \\
(L2) & \log_b \frac{x}{y} & = & \log_b x - \log_b y \\
(L3a) & \log_b x^\alpha & = & \alpha \cdot \log_b x \\
(L3b) & \log_b \sqrt[n]{x} & = & \frac{1}{n} \cdot \log_b x \\
(L4) & \log_b a & = & \log_b d \cdot \log_d a
\end{array}$$

Lemma 1 (Hilfssatz)

Aus der Definition folgt für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $r \in \mathbb{R}$:

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b^r = r \quad \text{und} \quad b^{\log_b r} = r$$

Beweis von (L1) und (L4)

(L1) $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$$\log_b x := m \quad \text{und} \quad \log_b y := n$$

$$\Leftrightarrow b^m = x \quad \text{und} \quad b^n = y$$

$$x \cdot y = b^m \cdot b^n \overset{P2}{=} b^{m+n}$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b \left(b^{m+n}\right) \overset{\text{Lemma 1}}{=} m + n = \log_b x + \log_b y$$

(L4) $\log_b a = \log_b d \cdot \log_d a$

Nach Lemma 1 gilt: $d^{\log_d a} = a$.

$$\log_b a \overset{\text{Lemma 1}}{=} \log_b d^{\log_d a} \overset{\text{(L3a)}}{=} \log_d a \cdot \log_b d \quad \square$$

Umschreiben eines Logarithmus

Seien $a, b, d, x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $a, b, d \neq 1$, dann folgt aus (L4):

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}$$

bekannte Logarithmen

- $\log_{10} a = \lg a$
  dekadischer (oder Briggscher) Logarithmus
- $\log_e a = \ln a$
  logarihtmus naturalis (oder Neperscher Logarithmus)
- $\log_2 a = \mathrm{ld}\ a$
  binärer Logarithmus

Aufgaben 8 aus der VL

1. Formen Sie folgenden Ausdruck mit Hilfe der Logarithmengesetze um:

$$\ln \frac{2 \cdot \sqrt{a+b} \cdot a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{c} \cdot (a+c)^2}$$

2. Weisen Sie Lemma 1 mithilfe der Definition nach.
3. Beweisen Sie (L3b) mithilfe von (P4).
4. Beweisen Sie (L2) mithilfe von (P3).

Summenzeichen

Definition

Für die wiederholte Addition nach einer gleichen Struktur ist es häufig elegant, das **Summenzeichen** Σ (Sigma) zu nutzen. Dabei treten für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geqq m$ folgende Begriffe auf:

$$\sum_{k=m}^{n} T(k) = T(m) + T(m+1) + T(m+2) + \cdots + T(n-1) + T(n)$$

k – **Summationsindex** $T(k)$ – Term, der i.d.R. von k abhängt
m – untere Summationsgrenze n – obere Summationsgrenze

Beispiele

1. $\sum_{k=0}^{4} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
2. $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

   allgemein: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (Gaußsche Summe)
3. $\sum_{k=2}^{2} \log_k 8 = \log_2 8 = 3$ allgemein: $\sum_{k=m}^{m} T(k) = T(m)$

Beispiele

4. $$\sum_{k=-2}^{3} 5 = 5+5+5+5+5+5 = 6 \cdot 5 = 30$$

   allgemein: $$\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1) \cdot c$$

5. $$\sum_{k=42}^{44} 3k = 3 \cdot 42 + 3 \cdot 43 + 3 \cdot 44 = 387$$

6. $$\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Rechengesetze

Für das Summenzeichen gelten folgende Rechengesetze:

1. $$\sum_{k=m}^{n} T(k) = \sum_{j=m}^{n} T(j) \quad \text{(Unabhängigkeit vom Indexnamen)}$$
2. $$\sum_{k=m}^{n} (T(k) + S(k)) = \sum_{k=m}^{n} T(k) + \sum_{k=m}^{n} S(k)$$
3. $$\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot T(k) = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} T(k) \quad \text{für beliebiges } \lambda \in \mathbb{R}$$
4. $$\sum_{k=m}^{r} T(k) = \sum_{k=m}^{n} T(k) + \sum_{k=n+1}^{r} T(k) \qquad m \leqq n \leqq r$$

Aufgaben 9 aus der VL

Berechnen Sie.

1. $$\sum_{k=-5}^{5} 3(k+1) - \sum_{k=-5}^{5} 3(k-1)$$
2. $$\sum_{k=0}^{9}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{9}(k-1)^2$$

   Wem das zu leicht fällt: Zum Weiterdenken
3. $$\sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{9}(2k+3)$$
   (Eine Indexverschiebung wäre wünschenswert.)
4. $$\sum_{k=3}^{5}\sum_{m=1}^{4}(4k-2m)$$

Definition Polynom

Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$. Diese heißen (reelle) **Koeffizienten**.
Ein **Polynom** ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Struktur:

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

Darstellung von Polynomen durch Nullstellen

Jedes Polynom mit n reelllen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lässt sich auch darstellen durch:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \cdot \tilde{p}(x)$$

Wenn man dieses Produkt ausklammert, erhält man

$$a_0 = \pm 1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \tilde{p}(0)$$

Polynomdivision

Daher kann man die Nullstellen durch Polynomdivision abspalten.

$$
\begin{array}{llllll}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & \\
\hline
& 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 \\
& -(6x^3 & -12x^2) & & \\
\hline
& & 8x^2 & +8x & -48 \\
& & -(8x^2 & -16x) & \\
\hline
& & & 24x & -48 \\
& & & -(24x & -48) \\
\hline
& & & & 0
\end{array}
$$

Eine zweite Möglichkeit, um eine Nullstelle abzuspalten, ist das Horner[1]-Schema.

Hornerschema

Wir wollen die Nullstelle $x = 2$ vom Polynom $p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 48$ abspalten.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 2 & -4 & 8 & -48 \\
\hline
 & & 4 & 12 & 16 & 48 \\
2 & 2 & 6 & 8 & 24 & 0
\end{array}
$$

Das entstandene Polynom ist $p_1(x) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24$.

Somit gilt: $p_1(x) \cdot (x - 2) = p(x)$, also

$$(2x^3 + 6x^2 + 8x + 24) \cdot (x - 2) = 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 48$$

[1] William George Horner (1786-1837), englischer Mathematiker

Aufgaben 10 aus der VL

Üben Sie die Polynomdivision!

1. $(x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3) : (x - y)$
2. $(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x - 1)$
3. $(x^3 - y^3) : (x - y)$
4. $(x^3 + y^3) : (x + y)$

Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** eine natürliche Zahl, definiert für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqq k$.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad n! := n \cdot (n-1)! \text{ und } 0! := 1$$

Pascal'sches Dreieck

Die Einträge sind Binomialkoeffizienten

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Pascal'sches Dreieck mit Binomialkoeffizienten

$n=0$						$\binom{0}{0}$					
$n=1$					$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$				
$n=2$				$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$			
$n=3$			$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
$n=4$		$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	
$n=5$	$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten (Pascal'sches Dreieck)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqq k$. Dann gilt für den Binomialkoeffizienten:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
5. $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

Binomischer Lehrsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Nutzen des Binomischen Lehrsatzes

Somit kann man verschiedene Potenzen bilden. Beispiele:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Weitere Identität

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=a^n-b^n$$

$$(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k=(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}=a^n-b^n$$

Spezialfall – Die geometrische Summenformel

Für $a \neq 1$ und $b = 1$ ergibt sich in der Summe:

$$(a-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^k=a^n-1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}a^k=\frac{a^n-1}{a-1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Aufgaben 11 aus der VL

1. Beweisen Sie die Eigenschaften 1 bis 4 des Binomialkoeffizienten.
2. Bestimmen Sie $(t+z)^6$ mithilfe des Binomischen Lehrsatzes.
3. Bestimmen Sie $(2a-3b)^4$ mithilfe des Binomischen Lehrsatzes.
4. Nehmen Sie an, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a-1}$ gilt.

   Zeigen Sie nun, dass auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + a^n$

   das gewünschte Ergebnis $\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$ liefert.