II Mengenlehre

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

18. September 2018

Begriffe in der Mengenlehre

Definition einer Menge (Georg Cantor, 1869)

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathcal{M}$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von $\mathcal{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen."

$a \in \mathcal{M}$ (a ist ein Element von $\mathcal{M}$)

$\emptyset$ - die leere Menge

$a \notin \mathcal{M}$ (a ist kein Element von $\mathcal{M}$)

Beispiele

1. $\mathcal{M} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$, dann ist bspw. $42 \in \mathcal{M}$, aber $2 \notin \mathcal{M}$
   $\{1, 3, 1, 17, 4, 3, 1, 42, 1\} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$ – jedes Element kommt nur einmal vor
2. $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
3. $\mathcal{P} = \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \text{ ist ungerade}\}$

Mengenbeziehungen

Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Mengen.

$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten.
($\mathcal{M}_1$ ist Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten
<u>und</u> es gibt Elemente in $\mathcal{M}_2$, die nicht in $\mathcal{M}_1$ sind.
($\mathcal{M}_1$ ist echte Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ enthalten die selben Elemente
($\mathcal{M}_1$ gleich $\mathcal{M}_2$)

Bemerkung

Es gilt stets: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ und $\emptyset \subseteq \mathcal{M}$.

Ist $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$, dann gilt: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$

implizite und explizite Angabe von Mengen

Mengen können auf zwei Arten angegeben werden:

1. Explizite Angabe aller Elemente:
$\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 6, 7\}$; $\mathcal{M}_2 = \{\heartsuit, \bigstar, \square\}$

2. Implizite Angabe der charakteristischen Eigenschaft:
$\mathcal{M}_3 = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$; $\mathcal{M}_4 = \{k : k \text{ ist Küchengerät}\}$

Beispiele

1. Sei $\mathcal{A} = \{k \mid k \text{ ist bestandene Klausur}\}$ und $\mathcal{B} = \{K \mid K \text{ ist Klausur}\}$, dann ist $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B}$.
   Wenn alle Klausuren bestanden wurden, dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, ansonsten sogar $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \text{ ist gerade}\} \subseteqq \mathbb{N}$
3. $\{1, 4\} \subseteqq \{1, 2, 3, 4\}$ bzw. sogar $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

Aufgabe in der VL

Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$ an.

$$\mathfrak{P}(\mathcal{M}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$$

Definition Potenzmenge, Kardinalität

Die Menge aller Teilmengen von $\mathcal{M}$ heißt **Potenzmenge** von $\mathcal{M}$. Ist $\mathcal{M}$ endlich, so gilt für die Anzahl der Elemente (**Kardinalität**) von $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$:

$$\#\mathfrak{P}(\mathcal{M}) = 2^{\#\mathcal{M}}$$

Also in unserem Beispiel ist $\#\mathcal{M} = 3$, somit ist $\#\mathfrak{P}(\mathcal{M}) = 2^3 = 8$.

Bemerkung

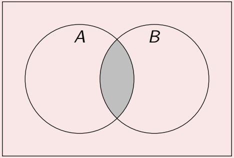
Für alle Potenzmengen gilt: $\{\emptyset, \mathcal{M}\} \subseteqq \mathfrak{P}(\mathcal{M})$

Mengenoperationen

Durchschnitt

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Heißt **Durchschnitt** der Mengen A und B.



Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B **disjunkt**.

Beispiele

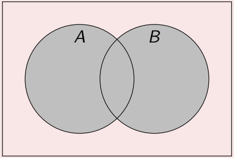
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{1, 2\}$
   $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\} \cap \{y \mid y \in \mathbb{Z}, |y| \leqq 2\} = \{1, 2\}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\} = \{2\}$

Vereinigung

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Heißt **Vereinigung** der Mengen A und B.

(Das oder ist ein mathematisches - „nicht ausschließendes oder".)



Beispiele

1. $\{2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2. $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
3. $\{2 \cdot n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

Vereinigung und Schnitt von Teilmengen

Seien A und B zwei (nichtleere) Mengen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

Vereinigung und Schnitt mit $\emptyset$

Es gilt für die Menge A außerdem:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A$$

Aufgaben aus der VL

Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
2. $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z},\ |y| < 6\}$
3. $C = \{p \mid \text{ p ist Primzahl}\} \cap \{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{w \mid w = 2 \cdot k - 1,\ k \in \mathbb{N},\ w < 12\}$

Bei den nachfolgenden Mengen wünscht man sich eine implizite Schreibweise. Geben Sie diese an.

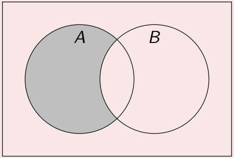
1. $E = \{5, 10, 15, 20, 25, ...\}$
2. $F = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
3. $G = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
4. $H = \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...\right\}$

Differenzmenge

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Heißt **Differenzmenge** „A ohne B".

(Achtung: A/B ist die Faktormenge!)



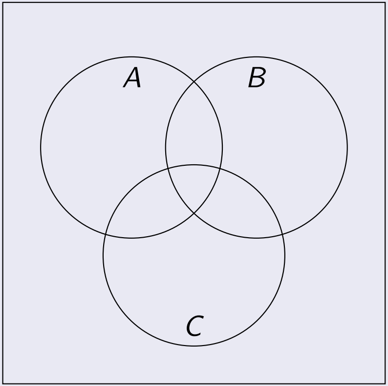
Beispiele

1. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \setminus \{p \mid p \text{ ist Primzahl }\} = \{1,4,6,8\}$
2. $\{4 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus \{2 \cdot m \mid m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$
3. $\{S \mid S \text{ ist Säugetier }\} \setminus \{L \mid L \text{ Tier, das an Land lebt}\}$ $= \{Wal, Robbe, Seekuh, Seeotter\}$,

   wobei natürlich $\{Delphin\} \subseteq \{Wal\}$ gilt.

Aufgabe aus der VL

Markieren Sie die gesuchten Mengen im Venn-Diagramm.



1. $(A \setminus C) \cap B$
2. $(C \cap B) \cap A$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(B \setminus C) \cup A$
5. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Kartesisches Produkt (nach René Descarte (1596–1650))

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Heißt **kartesisches Produkt** der Mengen A und B.
Es ist die Menge aller geordneten Paare (x, y), wobei gilt:

$$A \times B \neq B \times A$$

Bemerkung und Beispiel

In der Schule nutzen wir kartesische Produkte bei Punkten im zweidimensionalen Koordinatensystem ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$) oder im dreidimensionalen Koordinatensystem ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$).

$A = \{1, 3, 5\}; B = \{2, 3\}$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 2), (5, 3)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$

Aufgabe aus der VL

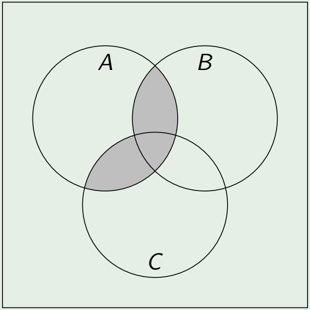
Stellen Sie die folgenden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

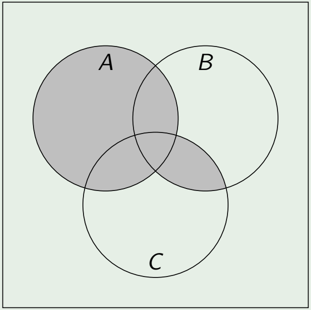
1. $A = \{(x, y) \mid x = 1\}$
2. $B = \{(x, -2) \mid -2 \leqq x \leqq 2\}$
3. $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{(x, y) \mid x + y \leqq 1,\ x, y \geqq 0\}$
5. $E = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqq 1\}$
6. $F = \{(x, y) \mid |x| \leqq 3, |y| \leqq 1\}$
7. $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Distributivgesetze der Mengenlehre

Für drei Mengen A,B,C gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$





Zahlbereiche I

Zahlbereich	Algebraische Ansätze
$\mathbb{N}$ – natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	entsteht durch wiederholte Addition mit 1 besitzt neutrales Element der Multiplikation
$\mathbb{N}_0$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	besitzt neutrales Element der Addition
$\mathbb{Z}$ – ganze Zahlen $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0$	abgeschlossene Addition durch inverse Elemente (inverse Operation: Subtraktion)
$\mathbb{Q}^+$ – pos. rationale Zahlen $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$	abgeschlossene Multiplikation durch inverse Elemente (inverse Operation: Division) <u>aber:</u> Addition nicht abgeschlossen
$\mathbb{Q}$ – rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$	abgeschlossene Addition und Multiplikation $\rightarrow$ lineare Algebra ist mit $\mathbb{Q}$ zufrieden

Zahlbereiche II

Zahlbereich	Algebraische Ansätze
$\mathbb{R}$ – reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ ist irrational } \}$	Eine Zahl heißt irrational, wenn sie nach dem Komma unendlich ist, aber nicht periodisch
$\mathbb{C}$ – komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	Nullstellen sämtlicher Polynome mit reellen Koeffizienten.

Ein neuer Zahlbereich kann durch den vorherigen Zahlbereich konstruiert werden (Äquivalenzrelationen).

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Aufgaben in der VL

Beschreiben Sie die folgenden beiden Mengen:

1. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Intervallschreibweise für Mengen reeller Zahlen

Intervallschreibweise

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; \quad \text{alternativ }]a, b[$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x\}; \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b\}; \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Aufgaben aus der VL

Seien $I_1 = [1,3), I_2 = [3,7], I_3 = (-2,10)$.

Bilden Sie die folgenden Mengen.

1. $I_1 \cap I_2$
2. $I_1 \cap I_3$
3. $I_1 \cup I_2$
4. $I_1 \setminus I_2$
5. $I_3 \setminus I_2$
6. $(I_1 \cup I_2) \cap I_3$