III Logik

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

19. September 2018

Aussagen

$\lambda o\gamma \acute{o} \varsigma$="das Wort"$\rightarrow$ Logik (math.) befasst sich mit Aussagen

Definition Aussage

Eine **Aussage** p ist ein sinnvolles sprachliche Gebilde mit der Eigenschaft, entweder wahr oder falsch zu sein. Jeder Aussage p kann man einen **Wahrheitswert** zuordnen.

$$w(p) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{falls } p \text{ falsch ist} \end{cases}$$

Beispiele

p: Eine Stunde hat 60 Minuten $\quad w(p) = 1$

q: 8 ist eine Primzahl $\quad w(q) = 0$

Verknüpfung von Aussagen

Verknüpfungen von zwei Aussagen p und q durch **Junktoren**

Symbolisch	Bezeichnung	Lesart
$\neg p$ $\sim p$ $\bar{p}$	Negation	"Nicht p"
$p \wedge q$	Konjunktion	"p und q"
$p \vee q$	Disjunktion	"p oder q"
$p \Rightarrow q$	Implikation	"wenn p, dann folgt q"
$p \Leftrightarrow q$	Äquivalenz	"p genau dann, wenn q"

Bei einer Äquivalenz gilt immer: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Wahrheitstabellen

Wahrheitstabelle 1

$w(p)$	$w(q)$	$w(\neg p)$	$w(p \wedge q)$	$w(p \vee q)$	$w(\neg p \wedge q)$	$w(\neg p \vee q)$
1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1

$p \wedge q$ ist nur "wahr", wenn beide Aussagen wahr sind.

$p \vee q$ ist nur "falsch", wenn beide Aussagen falsch sind.

Regeln von Augustus de Morgan (1806–1871)

Für zwei Aussagen p und q gilt:

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \text{ und } \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Wahrheitstabelle 2

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \Rightarrow q)$	$w(q \Rightarrow p)$	$w(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Zusammenhang wahr und falsch

„Aus etwas wahrem, kann man nur etwas wahres folgern.
Aus etwas falschem kann man alles folgern. "

Beispiel:

$$0 = 1 \Rightarrow -0,5 = 0,5 \Rightarrow |-0,5| = |0,5| \Rightarrow 0,5 = 0,5 \quad \text{w. A.}$$

Erklärung hinreichend und notwendig

Implikation und Äquivalenz sind in der Mathematik wichtig

$p \Rightarrow q$	p ist hinreichend für q q ist notwendig fü p p impliziert q
$p \Leftrightarrow q$	p ist hinreichend und notwendig für q

Beispiel:

A: $f'(x_0) = 0$; B: $f''(x_0) \neq 0$;
C: f besitzt in x_0 einen Extrempunkt

$$C \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg C$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow C$$

Ringschluss

Seien $p_1, p_2, ..., p_n$ mathematische Aussagen mit der Eigenschaft, dass $p_1 \Leftrightarrow p_2, p_1 \Leftrightarrow p_3, \ldots, p_{n-1} \Leftrightarrow p_n$. Um alle Äquivalenzen zu zeigen, reicht es aus, die folgende Kette zu beweisen:

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_{n-1} \Rightarrow p_n \Rightarrow p_1$$

Diese Schlussweise heißt **Ringschluss**.

Beispiel

Folgende Aussagen sind für ein $\triangle ABC$ äquivalent:

(i) $\triangle ABC$ ist rechtwinklig, mit Hypotenuse c.

(ii) Es gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

(iii) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

(iv) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

Wahrheitswerte für Gleichungen

Wenn Gleichungen keine Variablen enthalten, sind sie Aussagen, ansonsten Aussageformen, die von der Variable abhängig sind.

$2 = 2$	wahr	
$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$	wahr	
$1 = 2$	falsch	
$x + x = 2x$	wahr für alle x (allgemeingültig)	$\mathcal{L} = \mathbb{R}$
$x + 2 = 3$	wahr für $x = 1$, sonst falsch	$\mathcal{L} = \{1\}$
$x^2 = 4$	wahr für $x = -2$ und $x = 2$, sonst falsch	$\mathcal{L} = \{-2, 2\}$

Aussageform

Eine **Aussageform** ist eine Aussage, deren Wahrheitsgehalt von (mindestens) einer Variable abhängig ist.

Aufgabe in der VL: zueinander äquivalenten Gleichungen

Seien die folgenden Aussageformen gegeben:

$$A(x): x+2=5, \qquad B(x): -2x-4=-10,$$

$$C(x): -2x+10=4 \quad \text{und} \quad D(x): 10=2x+4$$

Zeigen Sie, dass
$A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C, C \Leftrightarrow D, A \Leftrightarrow C, A \Leftrightarrow D$ und $B \Leftrightarrow D$ gilt.

Lösung

Kurznotation:

Aussageformen und Quantoren

In der Mathematik hängen Aussagen oft von Variablen ab, daher betrachten wir Aussageformen $p(x)$ näher.

Umgang mit Aussageformen

Gegeben ist eine Aussageform $p(x) : x^2 - 6x + 9 = 0$
Für den Wahrheitswert von $p(x)$ gilt.

$$w(p(x)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 3 \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{cases}$$

Damit ist der Wahrheitswert von $p(x)$ nicht eindeutig,
aber wir können:

1. Für x konkrete Objekte einsetzen. ($p(1)$ wahr; $p(2)$ falsch)
2. Variable x wird durch Quantoren gebunden.

Definition Quantor

Ein **Quantor** bindet eine Variable an eine Aussageform, sodass diese zu einer Aussage wird.

Der Allquantor $\forall$

$\forall$ („Für alle“), z.B.:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqq 0$$

„Für alle x Element der reellen Zahlen gilt: $x^2 \geqq 0$“

Der Existenzquantor $\exists$

$\exists$ („Es existiert (mindestens) ein“), z.B.:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{5} < n < \sqrt{17}$$

„Es existiert (mindestens) eine natürliche Zahl n, für die gilt: n liegt zwischen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{17}$“

Weitere Formen des Existenzquantors

$\exists!$ - („Es existiert genau ein“)

$\nexists$ - („Es existiert kein“)

Beispiel $p(x) : x^2 - 6x + 9 = 0$

Mithilfe der Quantoren, können aus der Aussageform $p(x)$ zwei Aussagen u und v gemacht werden.

$u : (\forall x \in \mathbb{R} : p(x))$ falsch $\qquad \neg u : (\exists x \in \mathbb{R} : \neg p(x))$ wahr

$v : (\exists x \in \mathbb{R} : p(x))$ wahr $\qquad \neg v : (\forall x \in \mathbb{R} : \neg p(x))$ falsch

Beispiele aus der Analysis I

(Konvergenz einer Folge a_n mit Grenzwert g)

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\epsilon : |a_n - g| < \epsilon$$

(Stetigkeit einer Funktion $f(x)$)

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Negation der Junktoren und Quantoren

Seien u, v Aussagen und $p(x)$ eine Aussageform.

$$\neg(u \Rightarrow v) = u \wedge (\neg v) \qquad \neg\,(u \Leftrightarrow v) = u \Leftrightarrow (\neg v)$$

$$\neg\,(\forall x \in \mathbb{R} : p(x)) = \exists x \in \mathbb{R} : \neg p(x)$$

$$\neg\,(\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) = \forall x \in \mathbb{R} : \neg p(x)$$

Aufgaben in der VL

Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:

1. a: Alle Autos in Leipzig sind weiß.
2. b: Es gibt schwarze Möwen.
3. c: Eine Quadratzahl ist gerade genau dann, wenn die Zahl ungerade ist.
4. d: Alle Studierenden haben Logik nicht verstanden.

Lösung

1. $\neg$ a:
2. $\neg$ b:
3. $\neg$ c:

   oder:

4. $\neg$ d:

Aufgaben in der VL

Sei $P(x, y)$ ist die Aussageform „Die Person x isst gerne das Gericht y“. Beschreiben Sie folgende Aussagen und bilden Sie die Negation:

1. $\forall x \exists y : P(x, y)$ –
2. $\exists x \forall y : P(x, y)$ –
3. $\forall y \exists x : P(x, y)$ –
4. $\exists y \forall x : P(x, y)$ –

Aufgaben aus der VL

1. Beweisen Sie die Regeln von de Morgan mithilfe von Wahrheitstafeln.
2. Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, dass für drei Aussagen p, q und r die Distributivgesetze gelten:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

3. Beschreiben Sie die folgenden Aussagen in Worten, bilden Sie die Negation und prüfen Sie anschließend den Wahrheitsgehalt:
   1. $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
   2. $\exists k \in \mathbb{N} : 4 \cdot k + 23 \in \{x | x \text{ ist Primzahl}\}$
   3. $\forall a, b, c, n \in \mathbb{N} : a^n + b^n \neq c^n \Leftrightarrow n > 2$