IV Beweise in der Mathematik

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

20. September 2018

Mathematische Texte enthalten verschiedene Bezeichnungen der Sinneinheiten.

Bezeichnungen in mathematischen Texten

- **Axiome** – elementare Grundaussagen; werden nicht bewiesen
- **Definitionen** – führen neue Begriffe ein; enthalten keine Aussagen daher werden sie nicht bewiesen
- **Sätze** – formulieren Aussagen; müssen bewiesen werden, je nach Wichtigkeit: Theorem, Satz, Lemma (Hilfssatz), Korollar (Folgerung), usw.
- **Beweise** – Herleitung der gewonnen Aussagen
- **Bemerkungen** – Zwischentexte mit Erläuterungen, Motivierung, etc.
- **Beispiele** – Illustration neuer Aussagen/Begriffe

In der Mathematik gibt es vier grundlegende Beweisverfahren:

Beweisverfahren

- **Direkter Beweis**: Aus einer bekannten Aussage wird eine andere Aussage durch logische Schlüsse hergeleitet.
- **Indirekter Beweis**: Es wird angenommen, die Aussage sei falsch. Unter Benutzung bekannter Aussagen und korrekter logischer Schlüsse wird daraus ein Widerspruch. Also muss die ursprüngliche Aussage wahr sein.
- **Vollständige Fallunterscheidung**: Bei einer Aussage werden alle möglichen Fälle diskutiert und nur die wahren Aussagen führen zum Ergebnis. Dies sind meist mehrere direkte und indirekte Beweise.
- **Vollständige Induktion**: Beweis, um Gültigkeit für alle natürlichen (oder ganzen) Zahlen zu zeigen.

Beispiel 1 direkter Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, dann ist auch n^2 gerade.

Beweis: n ist gerade, d. h. $n = 2 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2 \cdot m)^2 = 4m^2$$

Weil 2 ein Teiler von $4m^2$ ist, ist $4m^2 = n^2$ gerade. $\square$

Beispiel 2 direkter Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis: n ist ungerade, d. h. $n = 2 \cdot m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2 \cdot m - 1)^2 = 4m^2 - 4 \cdot m + 1 = \underbrace{\underbrace{4 \cdot (m^2 - m)}_{\text{ist gerade}} + 1}_{\text{ist ungerade}} \qquad \square$$

Beispiel 3 direkter Beweis

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, dann gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2}$$

Beweis:
Für alle nichtnegativen reellen Zahlen gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & \leqq & \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \\ \Rightarrow & 0 & \leqq & a - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} + b \\ \Rightarrow & 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} & \leqq & a + b \\ \Rightarrow & \sqrt{a \cdot b} & \leqq & \frac{a+b}{2} \end{array}$$

$\square$

Beispiel indirekter Beweis

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, dann gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2}$$

Beweis:
Angenommen es gibt nichtnegative Zahlen a_0, b_0, für die gilt:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a_0 \cdot b_0} && > && \frac{a+b}{2} \\
\Rightarrow\quad & \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} && > && \frac{(\sqrt{a_0})^2 + (\sqrt{b_0})^2}{2} \\
\Rightarrow\quad & 0 && > && (\sqrt{a_0})^2 + (\sqrt{b_0})^2 - 2 \cdot \sqrt{a_0} \cdot \sqrt{b_0} \\
\Rightarrow\quad & 0 && > && (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^2 \qquad ↯
\end{aligned}$$

Also ist die Annahme falsch und somit die Aussage wahr. □

Standardbeispiel für indirekte Beweise

$\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\exists\ p, q \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Weiterhin seien p und q teilerfremd (vollständig gekürzter Bruch)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \overset{()^2}{\Rightarrow} 2 = \frac{p^2}{q^2} \overset{\cdot q^2}{\Rightarrow} 2q^2 = p^2$$

$\Rightarrow p$ ist gerade, also $p = 2m, \quad m \in \mathbb{N}$

$$2q^2 = 4m^2 \Leftrightarrow q^2 = 2m^2$$

$\Rightarrow q^2$ ist gerade $\Rightarrow q$ ist gerade $\quad ↯\ p$ und q sollen teilerfremd sein.

p und q haben den gleichen Teiler $2 \Rightarrow \sqrt{2}$ ist irrational. $\square$

Erinnerung: Betragsdefinition

Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert durch:

$$|x| := \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqq 0. \end{cases}$$

Beispiel Fallunterscheidung: Betragseigenschaft 1

Sei $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < c$, dann gilt $-c < x < c$

Beweis:

Fall 1 $x \geqq 0$: $|x| < c$ ist in diesem Fall das gleiche, wie $x < c$.
Abschätzung: $-c < 0 \leqq x$ folgt trivialerweise.

Fall 2 $x < 0$: $|x| < c$ ist in diesem Fall das gleiche, wie $-x < c$.
Durch Multiplikation mit -1 erhält man:
$x > -c \Leftrightarrow -c < x < 0 < c$. Insgesamt folgt also $-c < x < c$. $\square$

Aufgaben aus der VL

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Addiert man drei aufeinander folgende ganze Zahlen, ist das Ergebnis durch 3 teilbar.
2. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   1. $|x| \geqq 0$
   2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
   3. $|x - y| = |y - x|$ (Nutzen Sie die Aussage 3.2.)
   4. $|x + y| \leqq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl k richtig, wenn sie:

1. für den Startwert z.B. $k = 1$ richtig ist. (Induktionsanfang)
(manchmal auch $k = 0$ oder $k = 2$)

2. aus der Korrektheit der Aussage für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$, die Korrektheit für ihren Nachfolger $n + 1$ schließen kann.
(symbolisch: $n \mapsto (n + 1)$)

$n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar $\forall n \in \mathbb{N}$

(IA): Da $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ gilt die Beh. für $n = 1$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so, dass: $\tilde{n}^3 + 2 \cdot \tilde{n}$ durch 3 teilbar ist.

(IB): $\tilde{n} \mapsto (\tilde{n}+1) : (\tilde{n}+1)^3 + 2 \cdot (\tilde{n}+1)$ ist durch 3 teilbar

(IS): $(\tilde{n}+1)^3 + 2 \cdot (\tilde{n}+1) = \tilde{n}^3 + 3 \cdot \tilde{n}^2 + 3 \cdot \tilde{n} + 1 + 2 \cdot \tilde{n} + 2$

$$\overset{(K)}{=} \underbrace{\tilde{n}^3 + 2 \cdot \tilde{n}}_{\text{nach (IV) durch 3 teilbar}} + \underbrace{3 \cdot \tilde{n}^2 + 3 \cdot \tilde{n} + 3}_{=3\cdot(\tilde{n}^2+\tilde{n}+1) \text{ also durch 3 teilbar}} \qquad \square$$

Gaußsche Summe – $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$

(IA): Da $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so, dass: $\sum_{k=1}^{\tilde{n}} k = \frac{\tilde{n} \cdot (\tilde{n}+1)}{2}$ gilt.

(IB): $\tilde{n} \mapsto (\tilde{n}+1) : \sum_{k=1}^{\tilde{n}+1} k = \frac{(\tilde{n}+1) \cdot (\tilde{n}+2)}{2}$

(IS): $\sum_{k=1}^{\tilde{n}+1} k = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} k + (\tilde{n}+1) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{\tilde{n} \cdot (\tilde{n}+1)}{2} + (\tilde{n}+1)$

$$= \frac{\tilde{n}^2 + \tilde{n}}{2} + \frac{2\tilde{n}+2}{2} = \frac{\tilde{n}^2 + 3\tilde{n} + 2}{2} = \frac{(\tilde{n}+1) \cdot (\tilde{n}+2)}{2} \qquad \square$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0; \forall\, q \in \mathbb{R}$$

(IA): Da $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ gilt die Beh. für $n = 0$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so, dass: $\sum_{k=0}^{\tilde{n}} q^k = \frac{1-q^{\tilde{n}+1}}{1-q}$ gilt.

(IB): $\tilde{n} \mapsto (\tilde{n}+1) : \sum_{k=0}^{\tilde{n}+1} q^k = \frac{1-q^{\tilde{n}+2}}{1-q}$

(IS): $\sum_{k=0}^{\tilde{n}+1} q^k = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} q^k + q^{\tilde{n}+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-q^{\tilde{n}+1}}{1-q} + q^{\tilde{n}+1}$

$$= \frac{1-q^{\tilde{n}+1}}{1-q} + \frac{q^{\tilde{n}+1}-q^{\tilde{n}+2}}{1-q} = \frac{1-q^{\tilde{n}+2}}{1-q} \quad \square$$

Aufgaben aus der VL

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$
4. $n^2 + n$ ist gerade
5. $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar
6. $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar
7. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqq 10 : 2^n > n^3$

Vollständige Induktion bei Ungleichungen

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqq 5 : 2^n > n^2$$

(IA): Da $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ist, gilt die Behauptung für $n = 5$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so, dass: $2^{\tilde{n}} > \tilde{n}^2$ gilt.

(IB): $\tilde{n} \mapsto (\tilde{n}+1) : 2^{\tilde{n}+1} > (\tilde{n}+1)^2 = \tilde{n}^2 + 2 \cdot \tilde{n} + 1$

(IS): $2^{\tilde{n}+1} = 2 \cdot 2^{\tilde{n}} \overset{\text{(IV)}}{>} 2 \cdot \tilde{n}^2 \overset{?}{>} \tilde{n}^2 + 2 \cdot \tilde{n} + 1$

Es entsteht eine neue Aussage, die gezeigt werden muss...

Zu zeigen ist:

$$2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 > 2n + 1$$

Vollständige Induktion bei Ungleichungen, Fortsetzung

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqq 3 : n^2 > 2n + 1$$

(IA): Da $9 = 3^2 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$ ist, gilt die Behauptung für $n = 3$.

(IV): Sei $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so, dass: $\tilde{n}^2 > 2 \cdot \tilde{n} + 1$ gilt.

(IB): $\tilde{n} \mapsto (\tilde{n} + 1) : (\tilde{n} + 1)^2 > 2 \cdot (\tilde{n} + 1) + 1 = 2 \cdot \tilde{n} + 3$

(IS): $(\tilde{n} + 1)^2 = \tilde{n}^2 + 2 \cdot \tilde{n} + 1 \overset{\text{(IV)}}{>} 2 \cdot \tilde{n} + 1 + 2 \cdot \tilde{n} + 1 = 4 \cdot \tilde{n} + 2$

Es gilt $4 \cdot \tilde{n} + 2 > 2 \cdot \tilde{n} + 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \tilde{n} > 1$.

Daher ist (IS): $(\tilde{n} + 1)^2 \overset{\text{(IV)}}{>} 4 \cdot \tilde{n} + 2 > 2 \cdot \tilde{n} + 3 = 2 \cdot (\tilde{n} + 1) + 1$ $\square$

Damit ist auch die vorherige Induktion bewiesen, da nun die Ungleichung (die noch mit einem ? versehen war) gezeigt wurde.

Widerlegung durch Gegenbeispiel

Manche Aussagen kann man durch ein Gegenbeispiel widerlegen.

Beispiel

$$\forall a, b, c, n \in \mathbb{N} : a^n + b^n \neq c^n$$

Hier kann schnell durch Gegenbeispiele gezeigt werden, dass die Aussage so nicht stimmen kann.

Beispiel: $2^1 + 3^1 = 5^1$ oder $3^2 + 4^2 = 5^2$

Also muss die Aussage anders formuliert sein.

Pierre de Fermat (1607–1665) – Großer Fermatscher Satz (zwischen 1637 und 1643), bewiesen 1994

$$\forall a, b, c, n \in \mathbb{N}, n > 2 : a^n + b^n \neq c^n$$

Aufgaben in der VL

Finden Sie bei den folgenden Aussagen Gegenbeispiele, die zeigen, dass sie falsch sind.

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 41$ ist eine Primzahl
2. Für die Funktion $f(x) = 3^x$ gilt: $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = z^2$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + b^2$