VI Trigonometrie

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

21. September 2018

Definition Trigonometrie

Die **Trigonometrie** beschäftigt sich mit dem Messen ($\mu\epsilon\tau\rho o\nu$) von dreiseitigen ($\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$) Objekten.

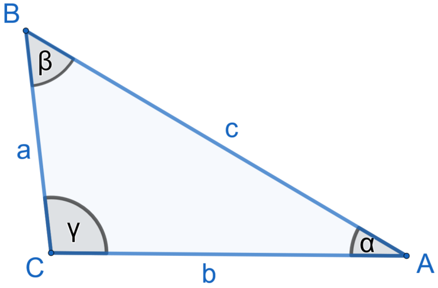


Abbildung: Allgemeines Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Zunächst gilt in Dreiecken:

- $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
  g ist die Grundseite
  h ist die Höhe auf g
- $U = a + b + c$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Rechtwinklige Dreiecke

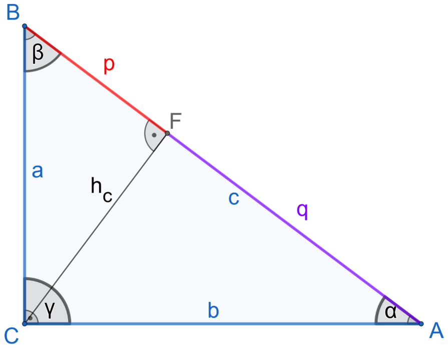


Abbildung: Rechtwinkliges Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Bezeichnungen

Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse (c), die übrigen Seiten bezeichnet man als Katheten (a und b).

h_c ... Höhe auf c

p, q ... Hypotenusenabschnitte

Spezielle Formeln für rechtwinklige Dreiecke (Bezeichnungen wie in der Abbildung)

- $\alpha + \beta = 90^\circ = \gamma$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)
- $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ (Flächeninhalt)
- $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ (Kathetensatz des Euklid)
- $h_c^2 = p \cdot q$ (Höhensatz des Euklid)
- Aus beiden Sätzen des Euklid folgt: $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$

Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Der Winkel α (und analog auch β) lässt sich im rechtwinkligen Dreieck durch Verhältnisse zwischen den Katheten und der Hypotenuse eindeutig beschreiben.

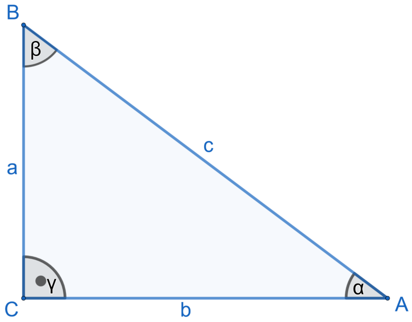


Abbildung: Rechtwinkliges Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Verhältnisse der Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{a} \qquad \csc\alpha = \frac{c}{b}$$

a ist die Gegenkathete zu α

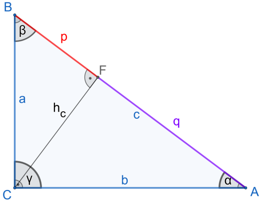
b ist die Ankathete zu α

Aufgaben aus der VL

Sei $\triangle ABC$ rechtwinklig mit Hypotenuse c. Zeigen Sie anhand der definierten Seitenverhältnisse, dass folgende Gleichungen gelten:

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
   (Analog könnten Sie auch den Kotangens herleiten.)
2. $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)
3. $1 + (\tan\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\cos\alpha)^2}$
4. $1 + (\cot\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\sin\alpha)^2}$

Herleitung Sinussatz



bekannte Verhältnisse in allgemeinen Dreiecken

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

Sinussatz für allgemeine Dreiecke

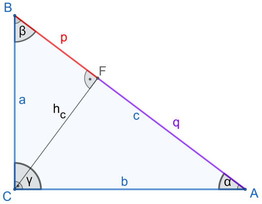
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

<u>Beweis</u>: Für a und b.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h_c}{b} : \frac{h_c}{a} = \frac{a}{b}$$

Restliche Gleichungen analog aus den Höhen h_a und h_b folgern. $\square$

Herleitung Kosinussatz



bekannte Verhältnisse allgemeinen Dreiecken

$$\cos\alpha = \frac{q}{b} \Leftrightarrow q = \cos\alpha \cdot b; \quad p = c - q$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin\alpha \cdot b$$

Kosinussatz für allgemeine Dreiecke

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Beweis:

$$a^2 = p^2 + h_c^2 = (c - \cos\alpha \cdot b)^2 + (\sin\alpha \cdot b)^2$$

$$= c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + \underbrace{(\cos\alpha)^2 \cdot b^2 + (\sin\alpha)^2 \cdot b^2}_{= b^2 \cdot ((\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2) = b^2} \quad \Box$$

Analog folgen auch die anderen beiden Kosinussätze.

Kosinussätze für allgemeine Dreiecke

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Beweis: Analog zum Kosinussatz für a^2. $\square$

Aufgaben aus der VL

Zeigen Sie unter Verwendung der VL, dass in einem allgemeinen Dreieck folgende Flächeninhaltsformeln gelten:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

Definition Einheitskreis

Der **Einheitskreis** ist ein Kreis, dessen Radius die Länge 1 hat. Er wird im Koordinatenursprung dargestellt durch die Lösungsmenge der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Für den Flächeninhalt des Einheitskreises gilt: $A = \pi \cdot r^2 = \pi$

Für den Umfang des Einheitskreises gilt: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi$

Grad- und Bogenmaß

Der Bogen B beschreibt, welcher Umfang auf dem Einheitskreis bei einem bestimmten Winkel ϕ zurückgelegt wurde. Es gilt:

$$\frac{B}{2 \cdot \pi} = \frac{\phi}{360^\circ} \Leftrightarrow \underbrace{B = \frac{\pi \cdot \phi}{180^\circ}}_{\text{Umrechnung ins Bogenmaß}} \Leftrightarrow \underbrace{\phi = \frac{180^\circ \cdot B}{\pi}}_{\text{Umrechnung ins Gradmaß}}$$

Aufgabe in der VL

Füllen Sie mithilfe der Umrechnungsformel $B = \frac{\pi \cdot \phi}{180^\circ}$ die folgende Tabelle aus:

ϕ	0°	10°	20°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	360°
B	0									π	2π

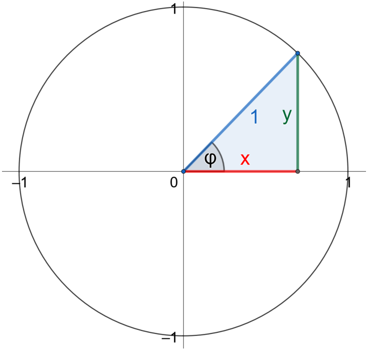


Abbildung: Verhältnisse im Einheitskreis, [H.W. 2018, GeoGebra]

Schulische Herleitung von Sinus- und Kosinusfunktion

Am Einheitskreis lässt sich bereits der funktionale Zusammenhang von Sinus und Kosinus des Winkels ϕ und dem Bogenmaß erkennen.

$$\sin\phi = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\phi = \frac{x}{1} = x$$

Periode der Winkelfunktionen

Dabei ist $\phi \in [0, 2\pi)$. Für größere oder kleinere ϕ wiederholen sich die Funktionswerte. Deshalb sind die Funktionen periodisch mit Periode 2π (ein Kreisumfang).

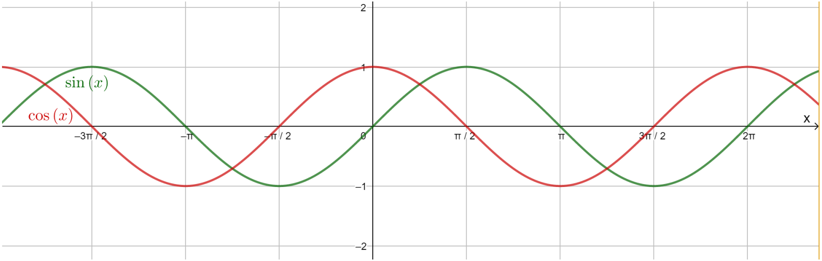


Abbildung: Sinus- und Kosinusfunktion, [H.W. 2018, GeoGebra]

Eigenschaften der Sinusfunktion und Kosinusfunktion

Für die Sinus- und Kosinusfunktion
$f, g : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ gilt:

- 2π-periodisch $\Leftrightarrow \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$, analog für $g(x)$
- $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$, analog für $g(x)$
- Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch, d.h. $\sin(-x) = -\sin x$
- Die Kosinusfunktion ist achsenymmetrisch, d.h. $\cos(-x) = \cos x$

Wissenschaftliche Definition der Sinus- und Kosinusfunktion (nicht in der Schule)

Definition Sinus- und Kosinusfunktion

Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ist definiert durch:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Die Kosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ist definiert durch:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Daraus lassen sich die Additionstheoreme herleiten (Beweis später).

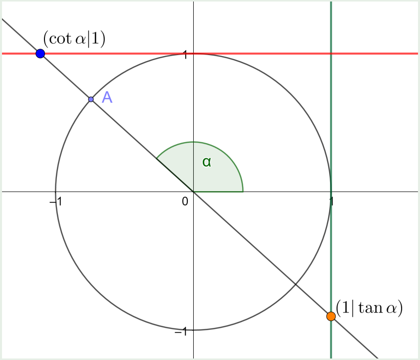
Additionstheoreme

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
3. $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und $\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$
4. $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$
5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

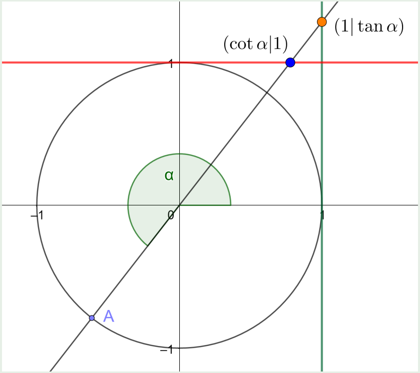
Herleitung Tangens und Kotangens

Der Tangens kann mithilfe des Einheitskreises und der Geraden $x = 1$ hergeleitet werden. Der Kotangens wird über den Einheitskreis und die Gerade $y = 1$ hergeleitet.

Winkel kleiner als π



Winkel größer als π



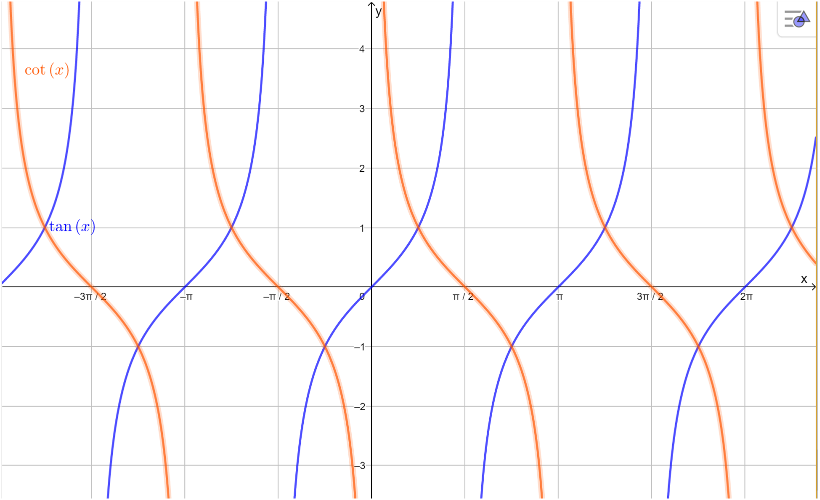


Abbildung: Tangens- und Kotangensfunktion, [H.W. 2018, GeoGebra]

Aufgaben aus der VL

1. Erstellen Sie sich eine Tabelle mit charakteristischen Funktionswerten (z.B. $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{5\pi}{6}$) für die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$.
2. Zeigen Sie das dritte Additionstheorem

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ und } \cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

   unter Verwendung von Theorem 1 bzw. Theorem 2.
3. Zeigen Sie das vierte Additionstheorem für den Fall "+":

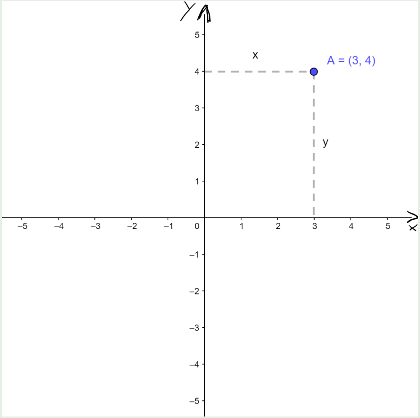
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

   unter Verwendung von Theorem 1 und Theorem 2.

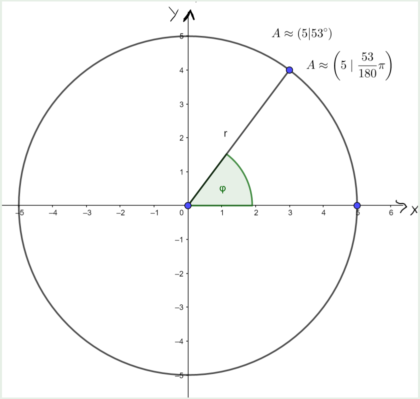
   Hinweis: Zu zeigen ist, dass $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ *gilt.*

Koordinaten von Punkten werden normalerweise kartesisch $(x|y)$ angegeben. Sie können jedoch auch in Polarkoordinaten durch einen Winkel und den Radius eines Kreises angegeben werden $(r|\phi)$.

kartesische Koordinaten



Polarkoordinaten



Umrechnung der Koordinaten

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

Beispiel: $A\left(5\middle|\frac{3\pi}{4}\right) = A(5|135°)$

Jeder Punkt P auf einem Kreis mit Radius r lässt sich darstellen als

$$P\left(r \cdot \sin\phi | r \cdot \cos\phi\right)$$

Also ist $A\left(\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\middle| -\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right) \approx A(3,54|-3,54)$

Aufgabe in der VL

Geben Sie $B\left(4\middle|\frac{\pi}{2}\right)$ in kartesischen Koordinaten an.

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

Beispiel: $C\left(-\frac{5}{2}\middle|\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

Der Radius des Kreises berechnet sich über den Satz des Pythagoras: $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r^2 = \frac{25}{4} + \frac{25\cdot 3}{4} \rightarrow r = 5$

Der Winkel bzw. der Bogen kann auf verschiedene Wege berechnet werden. Zum Beispiel durch den Arkustangens (Umkehrfunktion des Tangens; undefiniert für Werte auf der y-Achse).

Punkt im ...	I./IV. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant
$\phi = \ldots$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$

Der Punkt ist im II. Quadranten, also ist der Winkel im Beispiel $\phi = \arctan\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{2}{5})\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$$C\left(-\frac{5}{2}\middle|\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right) = C(5|\tfrac{2\pi}{3}) = C(5|120^\circ)$$

Aufgabe in der VL

Geben Sie $D(3|\sqrt{27})$ in Polarkoordinaten an.

Aufgaben aus der VL

1. Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der nachfolgenden Punkte in Polarkoordinaten.

   $P_1(3|\frac{5\pi}{6})$; $P_2(\frac{3}{2}|\frac{3\pi}{2})$; $P_3(4|\pi)$; $P_4(8|\frac{10\pi}{3})$

2. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkte.

   $K_1(0|2)$; $K_2(-4|0)$; $K_3(0|-5)$, $K_4(\frac{3}{\sqrt{2}}|\frac{\sqrt{18}}{2})$,