VII Komplexe Zahlen

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

24. September 2018

Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit.
Ursprung: Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Bezeichnung: Sei $z \in \mathbb{C}$, also $z = a + i \cdot b$. Dann heißt:

$\Re(z) = a$ der Realteil von z,

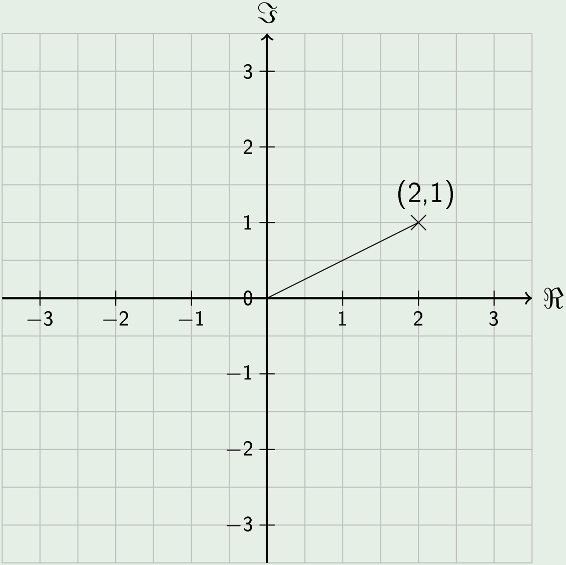
$\Im(z) = b$ der Imaginärteil von z und

i die imaginäre Einheit.

Bemerkung

Es gilt hierbei: $i^2 = -1$.

Darstellung von 2+i



Rechengesetze

Seien $x = a + i \cdot b, y = c + i \cdot d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $x + y = (a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$

(ii) $x \cdot y = (a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = (ac - bd) + i \cdot (bc + ad)$

Aufgaben in der VL

1. $(3 + 4i) \cdot i - (2 - 4i)$
2. $(1 - i)(2 + i)(3 - i)$
3. $(\sqrt{3} - 5 \cdot i) \cdot (5 + \sqrt{3}i)$

alternative Definition der komplexen Zahlen

Seien auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ folgende Operatoren definiert:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (komponentenweise)
2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Dann identifizieren wir den so definierten Körper $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ als komplexe Zahlen $\mathbb{C}$.

Zusatzaufgaben

Zeigen Sie anhand dieser Definition der komplexen Zahlen, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. $\forall g, h \in \mathbb{C} : g + h = h + g$ (Kommutativität der Addition)
2. $\forall g, h \in \mathbb{C} : g \cdot h = h \cdot g$ (Kommutativität der Multiplikation)
3. $0 := (0, 0)$ ist das neutrale Element der Addition, d.h. $\forall g \in \mathbb{C} : 0 + g = g$
4. $1 := (1, 0)$ ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. $\forall g \in \mathbb{C} : 1 \cdot g = g$
5. Für $i := (0, 1)$ gilt, dass $i^2 = -1$ ist.

Komplexe Konjukation, Betrag komplexer Zahlen

Die komplexe Konjugation ist eine Abbildung:

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}; a + i \cdot b \mapsto a - i \cdot b$$

Symbolisch: $\overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich mit dem Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^2$ identifizieren (bzw. wie der Betrag von Vektoren). Es gilt:

$$|a + i \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Aufgaben in der VL

1. $|3 + 4 \cdot i|$
2. Beweisen Sie: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. Beweisen Sie: $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

Division komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man mit dem komplex Konjugierten des Nenners erweitert. $\left(\frac{x}{y} = \frac{x \cdot \overline{y}}{|y|^2}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} &= \frac{(a + i \cdot b)(c - i \cdot d)}{(c + i \cdot d)(c - i \cdot d)} \\ &= \frac{ac - i \cdot ad + i \cdot bc + bd}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Aufgaben in der VL

1. $\frac{1 + 2 \cdot i}{i}$
2. $\frac{\sqrt{2} + 3 \cdot i}{\sqrt{3} - 2 \cdot i}$

Aufgaben aus der VL

1. Berechnen Sie die nachfolgenden Aufgaben und stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene dar.
   - $2 - i + (-3 + 2i)$
   - $(-1 + 2i) \cdot i$
   - $\overline{4 - 2i} - (3 + i)$
   - $\frac{1}{2i} + \frac{\sqrt{2} - 5i}{2 + \sqrt{5}}$
2. Beweisen Sie: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
3. Beweisen Sie: $|z| = |\overline{z}|$
4. Beweisen Sie: $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
5. Beweisen Sie: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Polardarstellung komplexer Zahlen

Eulersche Identität

Sei $r \geqq 0, \phi \in [0, 2\pi)$. Jede komplexe Zahl $z = a + i \cdot b$ lässt sich darstellen (Polardarstellung) durch:

$$r \cdot e^{i\phi} = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$$

Dabei ist $r = |z|$ und ϕ die Bogenlänge.

Die schönste Formel der Mathematik

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

<u>Beweis:</u> $e^{i \cdot \pi} + 1 = \cos\pi + i \cdot \sin\pi + 1 = -1 + i \cdot 0 + 1 = 0.$ $\square$

Aufgabe in der VL

Formen Sie $z = 3 - 3 \cdot i$ in die Polardarstellung um.

Aufgaben aus der VL

Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Polardarstellung um:

1. i
2. $\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$
3. $\sqrt{i}$
4. $\frac{5}{2} - \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12}} \cdot i$

Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $a + i \cdot b$ um.

1. $2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$
2. $2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$
3. $4 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$
4. $6 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}$

Potenzen komplexer Zahlen

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}, z = a + i \cdot b = r \cdot e^{i \cdot \phi}$.

$$z^n = (a + i \cdot b)^n = \underbrace{(a + i \cdot b) \cdot (a + i \cdot b) \cdot \dots \cdot (a + i \cdot b)}_{a-mal}$$

$$z^n = \left(r \cdot e^{i \cdot \phi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot \phi \cdot n}$$

Für n-te Wurzeln $(n \in \mathbb{N})$ der Gleichung $x^n = z$ gilt:

$$x_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i \cdot (\phi + 2k\pi)}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Jede Gleichung $x^n = z$ hat im Komplexen n Lösungen.

Fundamentalsatz der Algebra, bewiesen 1799/1815 Gauß

Jedes nicht konstante Polynom $p(x)$ vom Grad n besitzt mindestens eine und höchstens n komplexe Nullstellen.

Beispiel 1: komplexes Wurzelziehen

Zu bestimmen sind die komplexen Lösungen der Gleichung $x^4 = -16$.

Komplexe Zahl in Polarform darstellen

$z = 16 \cdot e^{i \cdot \pi}$

Übertragung auf die Formel

$x_k = \sqrt[4]{16} \cdot e^{\frac{i \cdot (\pi + 2k\pi)}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$

Bestimmung der einzelnen Nullstellen

$$x_0 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = 2 \cdot (\cos \tfrac{\pi}{4} + i \cdot \sin \tfrac{\pi}{4}) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$$
$$x_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} = 2 \cdot (\cos \tfrac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \tfrac{3\pi}{4}) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$$
$$x_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}} = 2 \cdot (\cos \tfrac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \tfrac{5\pi}{4}) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$$
$$x_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}} = 2 \cdot (\cos \tfrac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \tfrac{7\pi}{4}) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$$

Beispiel 2: komplexes Wurzelziehen

Zu bestimmen sind die komplexen Lösungen der Gleichung $x^6 = 729$.

Komplexe Zahl in Polarform darstellen

$z = 729 \cdot e^{i \cdot 0}$

Übertragung auf die Formel

$x_k = \sqrt[6]{729} \cdot e^{\frac{i \cdot 2k\pi}{6}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Bestimmung der einzelnen Nullstellen

$x_0 = 3 \cdot e^0 = 3 + i \cdot 0$

$x_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 3 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$x_2 = ... = -\frac{3}{2} + i \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $x_3 = ... = -3 + i \cdot 0$

$x_4 = ... = -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $x_5 = ... = \frac{3}{2} - i \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Beispiel 3: komplexes Wurzelziehen

Zu bestimmen sind die komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = -8i$.

Komplexe Zahl in Polarform darstellen

$z = 8 \cdot e^{i \cdot (\frac{3\pi}{2})}$

Übertragung auf die Formel

$x_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{\frac{i \cdot (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)}{3}}, k = 0, 1, 2$

Bestimmung der einzelnen Nullstellen

$x_0 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot (0 + i) = 2i$

$x_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$x_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{11\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6}) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$