VIII Gleichungen & Ungleichungen

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

25./26. September 2018

Gleichungen

Äquivalente Umformungen

Seien T_1 und T_2 zwei mathematische Terme.
Gleichungen ($T_1 = T_2$) können durch äquivalente Umformungen (Ursprung: Geldtausch, bei dem der Wert gleich (*aequus*) ist (*valere*)) vereinfacht und gelöst werden.
Das sind die Grundrechenarten der 1. und 2. Stufe.

$$\begin{array}{llcll} 1. & T_1 + T_3 & = & T_2 + T_3 & \forall \text{ Terme } T_3 \\ 2. & T_1 \cdot T_3 & = & T_2 \cdot T_3 & \forall \text{ Terme } T_3 \neq 0 \end{array}$$

Aufgabe in der VL

Formen Sie die Gleichung äquivalent um. Worauf müssen Sie achten?

$$-7 \cdot \frac{x-9}{x} = -49 - 7x$$

Bemerkung

Beim Potenzieren können Scheinlösungen auftauchen, deshalb ist eine PROBE notwendig.

Beispiel: $x = -1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$

Normalform

Der Term eines Polynoms ist in Normalform, wenn vor der höchsten Potenz der Unbekannten der Koeffizient 1 steht.

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Quadratische Normalform: $x^2 + px + q$

Kubische Normalform: $x^3 + ax^2 + bx + c$

Quadratische Gleichungen lösen

Eine quadratische Gleichung in Normalform $0 = x^2 + px + q$ hat die Lösung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beweis:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Rightarrow |x + \frac{p}{2}| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \square$$

Bemerkungen

1. Eigenschaften: $d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist die Diskriminante
   Ist $d > 0$, so existieren 2 reelle Lösungen,
   ist $d = 0$, so existiert 1 reelle Lösung
   (2 Lösungen fallen zusammen $\rightarrow$ Doppelwurzel) und
   wenn $d < 0$ ist, so existieren 2 komplexe Lösungen.
2. Eine allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann in $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ überführt werden. Somit ist $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ und es gilt die Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

3. Bei Gleichungen dritten Grades spaltet man einen Linearfaktor $(x - x_s)$ mittels Polynomdivision ab, sofern x_s eine Nullstelle ist und erhält so wieder eine quadratische Gleichung.

Aufgaben in der VL

Lösen Sie folgende Gleichungen:

1. $2x - (x-2)^2 = (x-2)^2 - 4\,(x+1)$
2. $\dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4} = 1$
3. $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = 0$
4. $3x^4 + 15x^2 - 108 = 0$
5. $x^3 + x^2 - 4x + 4 = 8$

Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen tritt die Unbekannte mindestens einmal im Radikant einer Wurzel auf.

Beispiel

$$\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$$

1. Schritt: Wurzel isolieren $\quad \sqrt[3]{x+1} = 2$

2. Schritt: Potenzieren $\quad x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$

$\rightarrow$ Scheinlösungen können entstehen

$\rightarrow$ PROBE: $\sqrt[3]{7+1} - 2 = 0$ w.A.

Aufgabe in der VL

Geben Sie die Lösungsmengen an:

$$\sqrt[4]{x^2+3} - \sqrt{x+1} = 0 \qquad \sqrt{x+5} + \sqrt{2x-4} = 5$$

Exponentialgleichungen

Bei Exponentialgleichungen tritt die Unbekannte nur im Exponenten auf. Sie sind daher häufig nicht lösbar, nur wenn die sie die folgende Form haben:

$$a^{P_1(x)} = b^{P_2(x)} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, P_1(x), P_2(x) \text{ sind Polynome.}$$

<u>Fall 1:</u> $a = b$, dann wende $\log_a$ auf beiden Seiten an $\rightarrow P_1(x) = P_2(x)$
<u>Fall 2:</u> $a \neq b$, beliebiger Logarithmus anwendbar

$$\rightarrow P_1(x) \cdot \log_c a = P_2(x) \cdot \log_c b \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x) \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x) \cdot \log_a b$$

Aufgabe in der VL

Bestimmen Sie die Lösungsmengen:

$$5^{3x-5} = 25^{2x+1} \qquad \sqrt[3]{3^{2x-1}} = \sqrt[4]{2^{x+1}} \qquad 3^{3x-1} + 27^{x+1} = 82$$

Logarithmengleichungen

Bei Logarithmengleichungen tritt die Unbekannte im Argument einer logarithmischen Funktion auf. Da die Lösung nur für positive Argumente definiert ist, muss der Definitionsbereich bestimmt werden. Anschließend wird wieder die Probe des Ergebnisses gemacht.

1. Schritt: Logarithmusgesetze anwenden und Gleichung auf folgende Formen bringen:

$$\log_a P_1(x) = b \quad a \neq 1 \qquad \text{oder} \qquad \log_a P_1(x) = \log_a P_2(x)$$

2. Schritt: Potenziere

$$P_1(x) = a^b \qquad\qquad P_1(x) = P_2(x)$$

3. Schritt: PROBE

Bemerkung: Bei $\log_a P_1(x) = \log_b P_2(x)$ versuchen Basen mit Logarithmusgesetzen umzuwandeln.

Aufgaben in der VL

Geben Sie die Lösungsmengen an.

1. $\log_4 x - \log_4 (x-2) = 2$
2. $\log_3 x + \log_3 (2x+1) = \log_3 (x+4)$
3. $\log_9 (2x^2+1) = \log_3 (x+1)$

Aufgaben aus der VL

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der nachfolgenden Gleichungen.

1. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$
2. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2 \cdot \sqrt{x}$
3. $2x^4 - 6x^2 - 4x = 0$
4. $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$
5. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
6. $\log_5 x + \log_5 (2x-1) = \log_5 (x+4)$

Umformungen von Ungleichungen

Seien T_1, T_2, T_3 mathematische Terme.
Ungleichungen haben die Form $T_1 < T_2$, $T_1 \leqq T_2$, $T_1 > T_2$ oder $T_1 \geqq T_2$.
Es gilt:

1. $T_1 < T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 > T_1$
2. $T_1 < T_2$ und $T_2 < T_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 < T_3$ (Transitivität)
3. $T_1 < T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 + T_3 < T_2 + T_3$
4. $T_1 < T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 \cdot T_3 \begin{cases} < T_2 \cdot T_3, & \text{falls } T_3 > 0, \\ > T_2 \cdot T_3, & \text{falls } T_3 < 0. \end{cases}$

Analog für die anderen Relationszeichen.

Aufgaben in der VL

Geben Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen an.

$$x + 2 \geqq 2x + 3 \qquad \frac{2x+3}{2} \leqq \frac{2x-1}{-3} \qquad \frac{2x-3}{2} > \frac{2x-1}{-3}$$

Bruchungleichungen

Bruchungleichungen lösen am Beispiel: $\frac{2}{x+1} \leqq 1, \qquad x \neq -1$

Beide Seiten mit dem Hauptnennern der auftretenden Brüche multiplizieren. Pro Multiplikation entsteht eine Fallunterscheidung.

<u>Fall 1:</u> $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \rightarrow I_1 = (-1, \infty)$
$\frac{2}{x+1} \leqq 1 \Leftrightarrow 2 \leqq x + 1 \Leftrightarrow 1 \leqq x \rightarrow I_2 = [1, \infty)$
Das erste Lösungsintervall ist $\mathcal{L}_1 = I_1 \cap I_2 = [1, \infty) = I_2$

<u>Fall 2:</u> $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \rightarrow I_3 = (-\infty, -1)$
$\frac{2}{x+1} \leqq 1 \Leftrightarrow 2 \geqq x + 1 \Leftrightarrow 1 \geqq x \rightarrow I_4 = (-\infty, 1]$
Das zweite Lösungsintervall ist $\mathcal{L}_2 = I_3 \cap I_4 = (-\infty, -1) = I_3$

Damit ist die gesamte Lösungsmenge $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathbb{R} \setminus [-1, 1)$

Aufgaben in der VL

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

1. $\dfrac{3x-8}{2x-1} > -5, \qquad x \neq \dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{2x}{2x-1} \leqq \dfrac{x}{x+2}, \qquad x \neq \dfrac{1}{2}$

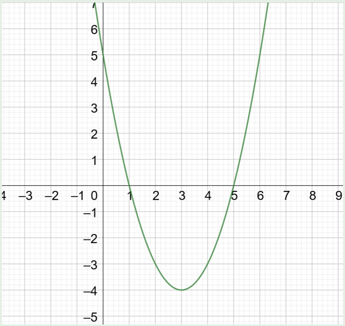
Aufgaben aus der VL

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

1. $\dfrac{3x+9}{2x-3} > 6, \qquad x \neq \dfrac{3}{2}$
2. $\dfrac{x+1}{x-1} \geqq 3, \qquad x \neq 1$

Quadratische Ungleichungen

Schrittfolge bei quadratischen Ungleichungen am Beispiel: $x^2 \leqq 6x - 5$



<u>1. Schritt:</u> Ungleichung in Normalform umformen
$\rightarrow$ Parabel ist immer nach oben geöffnet.

$$x^2 - 6x + 5 \leqq 0$$

<u>2. Schritt:</u> Nullstellen bestimmen

$$x_{1,2} = 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 1$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathcal{L} = [1, 5]$

Fallunterscheidung nach Nullstellen bei quadr. Ungleichungen

1. $P(x)$ hat 2 verschiedene reelle Nullstellen x_1, x_2

Falls $P(x) \leqq 0 \rightarrow \mathcal{L} = [x_1, x_2]$, $\quad P(x) < 0 \rightarrow \mathcal{L} = (x_1, x_2)$
(innerhalb des Intervalls)

Falls $P(x) > 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$ $\quad P(x) \geqq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus (x_1, x_2)$
(außerhalb des Intervalls)

2. $P(x)$ hat eine doppelte Nullstelle x_0
Falls $P(x) \leqq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \{x_0\}$ $\quad$ Falls $P(x) < 0 \rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$
Falls $P(x) \geqq 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R}$ $\quad$ Falls $P(x) > 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

3. $P(x)$ hat keine reelle Nullstelle $\quad \rightarrow P(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
es gibt keine $x \in \mathbb{R}$, so dass $P(x) \leqq 0$ oder $P(x) < 0$ gilt.

Aufgaben in/aus der VL

Geben Sie die Lösungsmengen an:

1. $x^2 + 2x > 3$
2. $x^2 < -x + 6$
3. $0 < 3x^2 - 6x + 3$
4. $-x^2 - 6 < -x$
5. $x^2 \leqq 3x - 2$
6. $x^2 + 2 \geqq \frac{9}{2}x$
7. $x^2 - 4x \leqq -4$
8. $x + 4 < -2x^2 - 11x - 9$

Betragsungleichungen

Betragsungleichungen am Beispiel $|3-5x|>5$

Fall 1: $3-5x<0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}<x \to I_1=\left(\frac{3}{5},\infty\right)$

Dann wird die Betragsungleichung folgendermaßen aufgelöst:

$-(3-5x)>5 \Leftrightarrow x>\frac{8}{5} \to I_2=\left(\frac{8}{5},\infty\right)$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1=I_1\cap I_2=I_2$

Fall 2: $3-5x \geqq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\geqq x \to I_3=\left(-\infty,\frac{3}{5}\right]$

$3-5x>5 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}>x \to I_4=\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2=I_3\cap I_4=I_4$ $\qquad \mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2=\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right]$

Aufgaben in/aus der VL

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an:

1. $|2x+7| \geqq 2$
2. $|2x-5| > 2(x+1)$
3. $|2x-5| < |2x+1|$
4. $|x+2| + |x+3| > 1$
5. $x \cdot |x| \geqq 1$
6. $3 \cdot |x| + x^2 - 1 > 0$