IX Matrizen, LGS & Gaußalgorithmus

Propädeutikum 2018

Holger Wuschke

27. September 2018

Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$

(a) Eine $m \times n$ Matrix $\mathbb{A}$ über $\mathbb{R}$ ist eine Anordnung von $m \cdot n$ reellen Zahlen in ein rechteckiges Schema aus m Zeilen und n Spalten:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R}, \\ i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Andere Notation: $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

Transponierte Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$

(b) Ist $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und ist ${a_{ij}}^T := a_{ji}$, so heißt die Matrix

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

heißt transponierte Matrix von $\mathbb{A}$.

Beispiel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Addition und skalare Multiplikation

Auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert man eine Addition durch

$$+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$

und eine Skalarmultiplikation durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$$

Bemerkung

$\mathbb{R}^{m\times n}$ bildet mit diesen Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(Neutralelement bezüglich $+ : \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ „Nullmatrix“,

Inversers von $\mathbb{A}$ bezüglich $+$ ist $-\mathbb{A}$)

Beispiel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad -3 \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -6 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Wir multiplizieren Matrizen durch das Prinzip „Zeile · Spalte“

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ !

Matrizenmultiplikation

Matrizen müssen für die Multiplikation „verkettet“ sein.

$$\underbrace{\mathbb{A}}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} \cdot \underbrace{\mathbb{B}}_{\in\mathbb{R}^{n\times p}} = \underbrace{\mathbb{AB}}_{\in\mathbb{R}^{m\times p}}$$

Definition Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{kp} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$$

Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}$$

Hinführung zu Gleichungssystemen

Multiplizieren wir eine Matrix

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & \cdots & + & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so erhält man eine Koeffizientenmatrix.

Lineares Gleichungssystem

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

besteht aus m Gleichungen, n Unbekannten und den Koeffizienten a_{ij} $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$.

Es heißt homogen, wenn $b_i = 0$. Wenn ein $b_i \neq 0$ ist, so heißt das LGS inhomogen. Ein geordnetes n-Tupel $(y_1, ..., y_n)$ reeller Zahlen ist ein Element der Lösungsmenge, wenn es gleichzeitig die m Gleichungen löst.

Es existiert eine bestimmte Lösung (eindeutig), es gibt unendlich viele Lösungen, d.h. wir erhalten eine (mehr)parametrige Lösungsschar oder es gibt keine Lösung.

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Jedes LGS kann auch als erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Äquivalente Umformungen bei LGS

Beim Vereinfachen des LGS, dürfen folgende Schritte gemacht werden:

1. Eine Gleichung mit einem reellen Faktor (außer 0) multiplizieren.
2. Zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
3. Eine Gleichung zu einer anderen aufaddieren.

Gaußalgorithmus

Ziel: Ein zum Ausgangssystem äquivalentes „gestrafftes“ System zu konstruieren.

Dreiecksgestalt (eindeutige Lösung)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

Trapezgestalt (unendlich viele Lösungen)

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

andere Gestalt (keine Lösung)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array}$$

Beispiel 1 – Gaußalgorithmus

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & = & 10 \\ x & + & 2z & + & 3y & = & 6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{II-2I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad \overset{III-I}{\rightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-II}{\rightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & & \rightarrow x = 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 4 & \rightarrow y = 1 & \\ & & & & -z & = & -1 & & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel 1 – Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{III-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-1\cdot III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{I-III}{\overset{II-2III}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel 2 – mehrdeutige Lösung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & -6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{III+2I}{\overset{II-I}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overset{I-II}{\longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow x = 1$ und $y + z = 2$. Setze $z = t \in \mathbb{R} \Rightarrow y + t = 2 \Leftrightarrow y = 2 - t$

$$\rightarrow \begin{array}{rcrr} x & = & 1 & \\ y & = & 2 & -t \\ z & = & & t \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgaben in/aus der VL

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender LGS:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & - & 2z & = & 12 \\ -4x & & & + & 3z & = & -17 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} w & + & 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 2w & + & 3x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 3w & + & 4x & + & 5y & + & 6z & = & 7 \\ & & x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$